

### Die Lambert-Reihe

- a) Beweisen Sie: Die Lambert<sup>a</sup>-Reihe

$$\mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

konvergiert für  $|z| < 1$  und divergiert für  $|z| > 1$ .

- b) Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n,$$

wobei  $d(n)$  die Anzahl der (echten und unechten) Teiler von  $n$  bezeichnet.

- c) Für welche  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die rechte Reihe.

- d) Beweisen Sie die Identität

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

---

<sup>a</sup>Johann Heinrich Lambert (\* 26. August 1728 in Mülhausen (Elsass); † 25. September 1777 in Berlin) war ein schweizerisch-elsässischer Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung, der u. a. die Irrationalität der Zahl  $\pi$  bewies.