

Die Lambert-Reihe

- a) Beweisen Sie: Die Lambert^a-Reihe

$$\mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

konvergiert für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

- b) Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n,$$

wobei $d(n)$ die Anzahl der (echten und unechten) Teiler von n bezeichnet.

- c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die rechte Reihe.

- d) Beweisen Sie die Identität

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

^aJohann Heinrich Lambert (* 26. August 1728 in Mülhausen (Elsass); † 25. September 1777 in Berlin) war ein schweizerisch-elsässischer Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung, der u. a. die Irrationalität der Zahl π bewies.